Ueber eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung; von M. Planck.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 19. October 1900.)

(Vgl. oben S. 181.)

Die von Hrn. Kurlbaum in der heutigen Sitzung mitgeteilten interessanten Resultate der von ihm in Gemeinschaft mit Hrn. Rubens auf dem Gebiete der längsten Spectralwellen ausgeführten Energiemessungen haben die zuerst von den Herren Lummer und Pringsheim auf Grund ihrer Beobachtungen aufgestellte Behauptung nachdrücklich bestätigt, dass das Wien'sche Energieverteilungsgesetz nicht die allgemeine Bedeutung besitzt, welche ihm bisher von mancher Seite zugeschrieben worden war, sondern dass dies Gesetz vielmehr höchstens den Charakter eines Grenzgesetzes hat, dessen überaus einfache Form nur einer Beschränkung auf kurze Wellenlängen bez. tiefe Temperaturen ihren Ursprung verdankt.[1] Da ich selber die Ansicht von der Notwendigkeit des Wien'schen Gesetzes auch an dieser Stelle vertreten habe, so sei es mir gestattet, hier kurz darzulegen, wie sich die von mir entwickelte elektromagnetische Theorie der Strahlung zu den Beobachtungsthatsachen stellt.

Nach dieser Theorie ist das Energieverteilungsgesetz bestimmt, sobald die Entropie S eines auf Bestrahlung ansprechenden linearen Resonators als Function seiner Schwingungsenergie U bekannt ist. Ich habe indes schon in meiner letzten Arbeit über diesen Gegenstand hervorgehoben[2], dass der Satz der Entropievermehrung an und für sich noch nicht hinreicht, um diese Function vollständig anzugeben; zur Ansicht von der Allgemeinheit des Wien'schen Gesetzes wurde ich vielmehr durch eine besondere Betrachtung geführt, nämlich durch die Berechnung einer unendlich kleinen Entropievermehrung eines in einem stationären Strahlungsfelde befind-

---

1) Auch Hr. Paschen hat, wie er mir brieflich mitteilte, neuerdings merkliche Abweichungen vom Wien'schen Gesetz festgestellt.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 730. 1900.

lichen Systems von n gleichen Resonatoren auf zwei verschiedene Weisen, wodurch sich die Gleichung[1]) ergab:

$$dU_n \,.\, \Delta U_n \,.\, f(U_n) = n\, dU \,.\, \Delta U \,.\, f(U),$$

wobei

$$U_n = nU \quad \text{und} \quad f(U) = -\tfrac{3}{5}\frac{d^2 S}{dU^2},$$

aus welcher dann das Wien'sche Gesetz in der Form hervorgeht:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = \frac{\text{const.}}{U}.$$

In jener Functionalgleichung stellt der Ausdruck auf der rechten Seite sicher die genannte Entropieänderung dar, weil sich n ganz gleiche Vorgänge unabhängig voneinander abspielen, deren Entropieänderungen sich daher einfach addiren müssen. Dagegen würde ich es wohl für möglich, wenn auch immer noch für nicht leicht begreiflich und jedenfalls schwer beweisbar ansehen, dass der Ausdruck links nicht allgemein die ihm früher von mir zugeschriebene Bedeutung besitzt, mit anderen Worten: dass die Werte von U_n, dU_n und ΔU_n gar nicht hinreichen, um die fragliche Entropieänderung zu bestimmen, sondern dass dazu auch U selber bekannt sein muss. Im Verfolg dieses Gedankens bin ich schliesslich dahin gekommen, ganz willkürlich Ausdrücke für die Entropie zu construiren, welche, obwohl complicirter als der Wien'sche Ausdruck, doch allen Anforderungen der thermodynamischen und elektromagnetischen Theorie ebenso vollkommen Genüge zu leisten scheinen wie dieser.

Unter den so aufgestellten Ausdrücken ist mir nun einer besonders aufgefallen, der dem Wien'schen an Einfachheit am nächsten kommt, und der, da letzterer nicht hinreicht, um alle Beobachtungen darzustellen, wohl verdienen würde, daraufhin näher geprüft zu werden. Derselbe ergiebt sich, wenn man setzt[2]):

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)}.$$

1) l. c. p. 732.

2) Ich gehe aus von dem zweiten Differentialquotienten von S nach U, weil diese Grösse eine einfache physikalische Bedeutung besitzt. (l. c. p. 731.)

Er ist bei weitem der einfachste unter allen Ausdrücken, welche S als logarithmische Function von U liefern (was anzunehmen die Wahrscheinlichkeitsrechnung nahe legt) und welche ausserdem für kleine Werte von U in den obigen Wien'schen Ausdruck übergehen. Mit Benutzung der Beziehung

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

und des Wien'schen „Verschiebungs"gesetzes [1]) erhält man hieraus die zweiconstantige Strahlungsformel:

$$E = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1},$$

welche, soweit ich augenblicklich sehen kann, den Gang der seither publicirten Beobachtungszahlen ebenso befriedigend wiedergiebt, wie die besten bisher aufgestellten Spectralgleichungen, nämlich die von Thiesen [2]), die von Lummer-Jahnke [3]) und die von Lummer-Pringsheim. [4]) (Wird an einigen Zahlen erläutert.) Ich möchte mir daher erlauben, Ihre Aufmerksamkeit auf diese neue Formel zu lenken, die ich vom Standpunkt der elektromagnetischen Strahlungstheorie aus nächst der Wien'schen für die einfachste halte.

---

1) Der Ausdruck des Wien'schen Verschiebungsgesetzes ist einfach:

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right),$$

wo ν die Schwingungszahl des Resonators bedeutet. Ich werde dies bei einer anderen Gelegenheit darlegen.

2) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **2.** p. 67. 1900. Dort findet sich auch bemerkt, dass Hr. Thiesen seine Formel schon aufgestellt hatte, ehe die Herren Lummer u. Pringsheim ihre Messungen auf grössere Wellenlängen ausdehnten, was ich hier hervorhebe weil ich vor dem Erscheinen der citirten Publication eine etwas andere Darstellung gegeben hatte (M. Planck, Ann. d. Phys. **1.** p. 719. 1900).

3) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. **3.** p. 288. 1900.

4) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **2.** p. 174. 1900.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

I On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum†

M. PLANCK

THE interesting results of long wave length spectral energy measurements which were communicated by Mr. Kurlbaum at today's meeting, and which were obtained by him and Mr. Rubens, confirm the statement by Mr. Lummer and Mr. Pringsheim, which was based on their observations that Wien's energy distribution law is not as generally valid, as many have supposed up to now, but that this law at most has the character of a limiting case, the simple form of which was due only to a restriction to short wave lengths and low temperatures.‡ Since I myself even in this Society have expressed the opinion that Wien's law must be necessarily true, I may perhaps be permitted to explain briefly the relationship between the electromagnetic radiation theory developed by me and the experimental data.

The energy distribution law is according to this theory determined as soon as the entropy S of a linear resonator which interacts with the radiation is known as function of the vibrational energy U. I have, however, already in my last paper on this subject[1] stated that the law of increase of entropy is by itself not yet sufficient to determine this function completely; my view that Wien's law would be of general validity, was brought about rather by special considerations, namely by the evaluation of an infinitesimal increase of the entropy of a system of n identical

† *Verh. Dtsch. Phys. Ges. Berlin* **2**, 202 (1900).

‡ Mr. Paschen has written to me that he has also recently found appreciable deviations from Wien's law.

resonators in a stationary radiation field by two different methods which led to the equation

$$dU_n \,.\, \Delta U_n \,.\, f(U_n) = n\, dU \,.\, \Delta U \,.\, f(U),$$

where $$U_n = nU \quad \text{and} \quad f(U) = -\frac{3}{5}\frac{d^2S}{dU^2}.$$

From this equation Wien's law follows in the form

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\text{const}}{U}.$$

The expression on the right-hand side of this functional equation is certainly the above-mentioned change in entropy since n identical processes occur independently, the entropy changes of which must simply add up. However, I could consider the possibility, even if it would not be easily understandable and in any case would be difficult to prove, that the expression on the left-hand side would not have the general meaning which I attributed to it earlier, in other words: that the values of U_n, dU_n and ΔU_n are not by themselves sufficient to determine the change of entropy under consideration, but that U itself must also be known for this. Following this suggestion I have finally started to construct completely arbitrary expressions for the entropy which although they are more complicated than Wien's expression still seem to satisfy just as completely all requirements of the thermodynamic and electromagnetic theory.

I was especially attracted by one of the expressions thus constructed which is nearly as simple as Wien's expression and which deserves to be investigated since Wien's expression is not sufficient to cover all observations. We get this expression by putting†

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)}.$$

† I use the second derivative of S with respect to U since this quantity has a simple physical meaning.

It is by far the simplest of all expressions which lead to S as a logarithmic function of U—which is suggested from probability considerations—and which moreover reduces to Wien's expression for small values of U. Using the relation

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

and Wien's "displacement" law† one gets a radiation formula with two constants:

$$E = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{c/\lambda T} - 1},$$

which, as far as I can see at the moment, fits the observational data, published up to now, as satisfactorily as the best equations put forward for the spectrum, namely those of Thiesen,[2]‡ Lummer–Jahnke,[4] and Lummer–Pringsheim.[5] (This was demonstrated by some numerical examples.) I should therefore be permitted to draw your attention to this new formula which I consider to be the simplest possible, apart from Wien's expression, from the point of view of the electromagnetic theory of radiation.

† The expression of Wien's displacement law is simply

$$S = f(U/\nu),$$

where ν is the frequency of the resonator, as I shall show elsewhere.

‡ One can see there that Mr. Thiesen had put forward his formula before Mr. Lummer and Mr. Pringsheim had extended their measurements to longer wave lengths. I emphasise this point as I have made a statement to the contrary[3] before this paper was published.

References

1. M. Planck, *Am. Physik* **1**, 730 (1900).
2. M. Thiesen, *Verh. D. Phys. Ges. Berlin* **2**, 67 (1900).
3. M. Planck, *Ann. Physik* **1**, 719 (1900).
4. O. Lummer and E. Jahnke, *Ann. Phys. Lpz.* **3**, 288 (1900).
5. O. Lummer and E. Pringsheim, *Verh. Dtsch. Phys. Ges. Berlin* **2**, 174 (1900).